

数学课程中“人为规定”的思想性

郜舒竹

(首都师范大学 初等教育学院, 北京 100048)

摘要:数学课程内容中所蕴含的思想是无数前人大师在数学研究实践中产生的无数想法凝练出来的,具有多样性、复杂性和隐蔽性。数学课程中“人为规定”的内容,具有较强的主观性,其中蕴含着丰富的思想。可以概括为确定性、统一性、继承性和多元化。在数学课程中挖掘这样的思想性内容,并融入学生的数学学习活动中,让学生经历对人为规定内容的发明与解释活动,一方面能够丰富数学课程的人文性,同时有益于数学学习中的深入思考。

关键词:人为规定;数学思想;确定性;统一性;继承性;多元化

中图分类号:G623.5 **文献标志码:**A **文章编号:**1000-0186(2018)09-0093-06

数学课程中有一些内容是对客观规律的描述,比如,“平面上任意三角形的三个内角之和等于180度”,描述的是不同三角形的共性特征;勾股定理体现出任意直角三角形三边之间的关系。这类知识的特点是具有较强的客观性,不依人的主观意志为转移。学生学习这类知识的核心活动是“发现”。^[1]

除此之外,还有一类主观性较强的内容,是长期以来由于某种主观因素而人为规定的。比如:在除法运算的内容中有“除数不能为零”以及“余数要比除数小”的规定,在初中和高中函数定义中有“唯一确定”的规定,在高中有关指数函数内容中有“底数大于零”的规定。诸如此类的人为规定是长期以来随着数学研究的发展,人们逐步形成的统一认识,其中蕴含着人的意愿、情感和思维等思想性内容。在数学课程中挖掘并归纳这样的思想,并融入学生的学习活动中,让学生经历对人为规定内容的发明与解释活动,一方面能够丰富数学课程的人文性,同时能

够让学生经历“为什么这样规定”的思考过程,有益于数学学习中的深入思考。

一、确定性

“确定性”是相对于“随机性”而言的,随机性现象或对象具有随意性,人难以把握、预见和判断,因此确定性就成为人主观上的追求目标。张景中院士在《感受小学数学思想的力量——写给小学数学教师们》一文中指出:“在数学里,数量之间的确定性关系叫作函数关系。”^[2]这样的确定性关系在函数定义中表现为随着自变量的确定,因变量要存在,并且唯一确定。因此,函数关系的确定性表现为函数值的“存在性”和“唯一性”。这样的确定性使得基本的因果推理“如果 $x_1 = x_2$,那么 $f(x_1) = f(x_2)$ ”能够实现。

作为人的主观意愿,确定性首先是为了迎合数学自身逻辑关系的需要。比如,在自然数范围内的除法运算,如果没有“余数要比除数小”的

规定，就会出现运算结果多样的现象，给以此为基础的推理带来麻烦。

在小学五年级“质数与合数”的课程内容中规定：1 既不是质数，也不是合数。自然的疑问是：为什么不能把 1 归为质数？事实上，人最初的想法是把全体自然数分为两类：一类是不能再分的数，叫作质数；另一类是可以再分的数，叫作合数。1 也是不能再分的数，当然应当是质数。19 世纪之前欧洲出版的许多数学教科书中都是把数字 1 当作质数的。图 1 是当时列出的 100 以内的全部质数，其中 1 是 100 以内的第一个质数。^[3]

The prime numbers below 100 are 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

图 1 欧洲教科书扫描图

后来逐步发现，将一个合数分解为质数乘积的形式是许多推理的基础，这个分解的过程在如今的小学数学课程中叫作分解质因数。作为推理的基础，自然希望这个分解的形式唯一确定。比如，100 分解质因数的形式为： $100 = 2^2 \times 5^2$ 。其中出现的质数以及相同质数的个数，都是确定不变的，使得 100 质因数分解的形式具有唯一性，因而也就具有了确定性。如果 1 是质数，这种确定性就无法满足，比如 100 还可以分解为 $100 = 2^2 \times 5^2 \times 1^3$ 。

将 1 剔除出质数，并不符合人的初衷，是基于对确定性的主观愿望不得已而为之的。数学课程中诸如除数（分母）不能为 0，算术平方根与绝对值，反三角函数的主值区间，极限（级数）的收敛，向量运算没有除法等人为规定的内容，都与这种确定性思想有关。运用确定性思想可以解释许多“为什么这样规定”的问题。

确定性作为人的主观意愿，也是顺应客观规律的。比如，对于物体运动的实际问题，经常需要描述“时间”和“速度”的关系。把时间作为自变量，对应的速度作为因变量的函数关系，体现的是时刻一旦确定，对应时刻的速度就随之确定。换言之，对同一物体来说，“相同时刻，不同速度”的现象是不可能出现的。

二、统一性

数学体系的构建追求形式的统一，常常需要

运用辩证法中对立统一的思想。任何对象的存在，都伴随着对立的一方的并存，而且对立的双方在一定条件下是可以相互转化的。在数学课程内容中，将处于对立状态的对象纳入同一个系统之中，使之成为同一个系统中的不同状态，就体现了这种对立统一的思想。

比如，小学数学课程中乘法运算的意思是“相同加数求和”，就是说至少应当是两个或者两个以上的相同加数相加，才会出现乘法运算。按照这样的理解， 1×1 以及 0×0 等算式就是没有意义的，因为“相同加数相加”的过程根本没有发生，对应的“相同加数求和”的加法算式也无法写出。出于对乘法系统完整、统一的意愿，需要将 1×1 以及 0×0 等特殊情况纳入到乘法运算体系中，因此作出相应的人为规定：1 乘任何数的结果还是这个数；0 乘任何数的结果都是 0。

人为规定的结论通常有两个方面的来源，其一是符合人的直觉，其二是符合相应的规律或规则。比如，为什么规定“1 乘任何数的结果还是这个数”？对于 2×1 ，除了直觉上表示“1 个 2”或者“2 个 1 相加”，结果应当等于 2，更重要的原因是要符合运算律。比如，如果把数字 1 看作 $4 - 3$ 的结果，那么就可以运用分配律对 2×1 进行如下的计算：

$$2 \times 1 = 2 \times (4 - 3) = 2 \times 4 - 2 \times 3 = 2。$$

说明规定“ $2 \times 1 = 2$ ”不仅符合直觉，也不违背乘法对加、减法的分配律。在初中数学课程中，表示相同因数相乘的指数与幂的运算中，也有类似情况。比如 4^3 表示相同因数相乘 $4 \times 4 \times 4$ ，那么 4^1 和 4^0 是什么意思？为了实现乘方运算系统的统一，就需要对这样的特例规定相应的取值。规定 $4^1 = 4$ ，无论从直觉还是运算规律看都是合理的。

对于 4^0 如何规定其取值，从“相同因数相乘”的意义上看，这个表达式表示的是“没有 4 相乘”，类似于“ $4 \times 0 = 0$ ”表示“没有 4 相加”，因此直觉上看应当规定 $4^0 = 0$ 。如果把指数 0 看作是 $2 - 2$ 的结果，运用运算规律计算却得到了不同的结果：

$$4^0 = 4^{2-2} = \frac{4^2}{4^2} = 1。$$

当出现这种直觉与运算规律不一致的现象

时,自然应当遵从运算规律进行规定,使得人为规定能够与相关的运算规律无矛盾。因此,就有了 $4^0=1$ 这样的人为规定。在高中数学课程中关于阶乘运算也有类似的规定: $1!=1$ 以及 $0!=1$ 。

我国数学课程与教学历来有渗透辩证唯物主义思想的传统,统一性的思想与方法可以视为辩证唯物主义对立统一规律的体现。将其融入数学课程与教学,也是对数学教育本土化优秀传统的继承。

三、继承性

1995年7月,荷兰出版的期刊《数学中的教育研究》^①刊发了一篇研究以色列高中数学教师本体性知识的文章,其中有一个如何看待分数指数幂 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 的测试题。调查结果显示,大部分被试教师都认为表达式 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 的含义是唯一确定的,可以确定其结果为 $(-8)^{\frac{1}{3}}=-2$ 。文章作者认为这样的回答是不完善的,理由是如果运用不同的方法变形,会出现两个不同的结果。

方法1: $(-8)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{-8}=-2$ 。

方法2: $(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}=(8^2)^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{2}{6}}=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2$ 。

因此,就出现了 $-2=(-8)^{\frac{1}{3}}=2$ 形式的悖论。文章作者认为,诸如 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 这样出现多种结果的表达式,等同于不能确定其结果,因此是无法定义的。^[4]

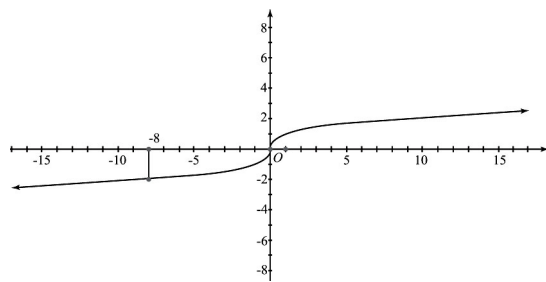
一年后的1996年9月,同一期刊上载文表达了不同观点。认为表达式 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 是可以确定其意义的。使得 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 不确定的原因,是前面方法2中出现了 $(-8)^{\frac{1}{3}}\rightarrow(-8)^{\frac{2}{6}}$ 的推理。悖论的出现并不是因为 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 的意义不确定,而是 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 与 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ 不具备相等关系。为避免 $(-8)^{\frac{1}{3}}\rightarrow(-8)^{\frac{2}{6}}$ 这样的推理,只需要在分数指数幂的定义中,对分数指数增加“分子与分母互质”或“最简分数(即约分数)”的规定即可。^[5]

事实上,如何理解 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 的问题,实质是如何看待 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 与 $(-8)^{\frac{2}{6}}$ 的关系问题。在小学数学中就已经熟悉的分数基本性质 $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$,能否直接继承到指数运算中,使得 $(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}$?

英国19世纪数学家乔治·皮克科(George Peacock, 1791—1858)于1830年在剑桥大学出版社出版的《论代数》前言中,提出一个从算术到代数拓展的“同形继承原理”^②,意在研究从算术到代数的拓展过程中,如何将算术中的运算规律和法则继承于意义更为广泛的代数运算的问题。算术中的运算规律一般适用于自然数范围,代数中符号所代表的对象会超越出自然数范围,此时要遵循的原则是尽可能让算术中的规律从形式(form)到取值(value)在代数中都保持一致。^[6]关于 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 的讨论,实质是算术中的分数基本性质能否同形继承到底数为负数的有理数指数幂的运算中。

从函数的视角看,将分数基本性质和乘法交换律应用于幂函数的指数,可以得到三个幂函数(函数图象见图2): $y=x^{\frac{1}{3}}$ 、 $y=(x^2)^{\frac{1}{6}}$ 和 $y=(x^{\frac{1}{6}})^2$ 。

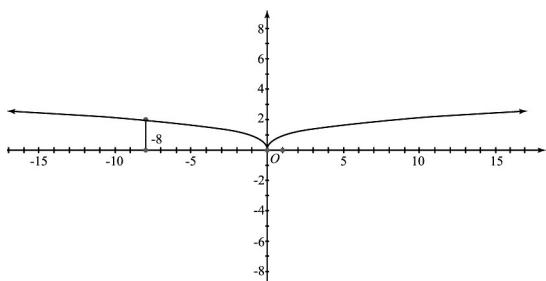
从图象上明显看出三个函数定义域、值域以及奇偶性的差异。使用乘法交换律将 $y=x^{\frac{2}{6}}$ 变为 $y=(x^2)^{\frac{1}{6}}$ 或 $y=(x^{\frac{1}{6}})^2$,每次改变都导致函数定义域以及相关性质发生变化。



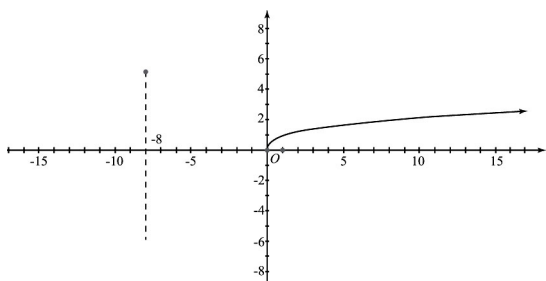
(1) $y=x^{\frac{1}{3}}$

①英译为 The Educational Studies in Mathematics。

②英译为 The Principle of Permanence of Equivalent Forms。



$$(2) y = (x^2)^{\frac{1}{6}}$$



$$(3) y = (x^{\frac{1}{6}})^2$$

图 2

还可以在复数范围内看，把表达式 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 和 $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 分别看作方程 $x^3 = -8$ 和 $x^6 = (-8)^2$ 在复数域内解的集合。方程 $x^3 + 8 = 0$ 在复数范围内有三个解^①，而方程 $x^6 = (-8)^2$ 有六个解^②。这说明在复数范围内，表达式 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 和 $[(-8)^2]^{\frac{1}{6}}$ 分别表示两个不同的集合，而且前者是后者的真子集。二者之间的关系不能用等号表达，而应当用集合间的关系符号表达。

因此，在算术中熟悉的运算规律，在指数以及指数幂的运算中并不总是适用。同形继承原理只有在底数为正数时才能实现，这也就是对于有理数指数幂和指数函数 $y = a^x$ ，为什么需要规定底数 $a > 0$ 的道理。

2017 年颁布的《普通高中数学课程标准（2017 年版）》将有理数指数幂以及实数指数幂安排在“指数函数”课程内容中，具体要求是“了解指数的拓展过程，……”^[7] 同形继承原理及其实施应当成为其中拓展过程的重要内容。

从算术到代数的同形继承原理，表现出人们对于数学内容可继承性的意愿。数学课程中数系

的拓展过程始于自然数，逐步经历增加零和负整数到整数，进一步增加分数到有理数，增加无理数到实数，增加虚数到复数的过程。在这样的拓展过程中，无论是数学家还是学习者，都有实现继承性的主观愿望，而在拓展过程中出现的逻辑矛盾，使得人不得不通过增加限制条件，或作出新的规定等办法规避矛盾。

主观的限制条件和人为规定具有多样性，不同的人会增加不同的限制条件，或作出不同的规定。因此，针对如何理解 $(-8)^{\frac{1}{3}}$ 所出现的不同意见是很正常的。如果期望学生在数学学习过程中了解这样的过程，感悟继承性思想，就需要在数学课程以及教学中融入此类内容。

四、多元化

人为规定内容的主观性决定了其多元化的特点，这一特点首先表现为因人而异的差异性。比如，对于自然数范围内的除法运算，人为规定“余数要比除数小”，此时对于类似于 $6 \div 2$ 这样整除的情况，就是余数为零，利用竖式算法就可以得到 $6 \div 2 = 3$ 。

$$\begin{array}{r} 3 \\ 2 \overline{) 6} \\ \underline{6} \\ 0 \end{array}$$

这样的规定并不是不可改变的。如规定“余数不能为零”，也就是在带余除式 $a \div b = q \cdots r$ 或 $a = bq + r$ 中，将限制条件 $0 \leq r < b$ 改变为 $0 < r \leq b$ 。这样 $6 \div 2$ 的竖式算法就改变成商为无限循环小数的形式：

$$\begin{array}{r} 2.999\cdots \\ 2 \overline{) 6} \\ \underline{4} \\ 2 \\ \underline{2} \\ 0 \\ \underline{0} \\ \cdots \end{array}$$

由此得到 $6 \div 2 = 2.\dot{9}$ ，进而说明 $2.\dot{9} = 3$ ，

①三个解分别表示为 $-2, 1 - \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i$

②六个解分别表示为 $1 + \sqrt{3}i, -1 + \sqrt{3}i, -2, 2, 1 - \sqrt{3}i, -1 - \sqrt{3}i$ 。

这也可以成为证明 $0.\dot{9}=1$ 的一种方法。随着数系的扩充，余数也经常以负数的形式出现，比如 $7\div 2$ 也可以认为是商为 4，余数为 -1 。凡此都说明人为规定的内容往往具有“可以这样，还可以那样”的差异性，这种差异性给人带来的是可能性的选择。数学课程与教学应当让学生有机会感受这样的差异，经历对于可能性的选择过程。

人为规定内容多元化的另一种表现形式是与时俱进的发展性。在数学发展历史中，当负数引入有理数中时，为了继承自然数中的运算规律，一个关键问题是如何规定负数与负数相乘的符号。

在自然数运算中，可以把 $1\times 1=1$ 看作“一个 1 等于 1”，类似地可以把 -1×1 看作“一个 -1 等于 -1 ”，因此规定 $(-1)\times 1=-1$ 。但如何规定 $(-1)\times (-1)$ 就成为当时的难题。欧拉用排除的方法解释：“因为它一定是 $+1$ 和 -1 之一，但它不能是 -1 ，因为 $(-1)\times 1=-1$ 。”对于规定 $(-1)\times (-1)=+1$ 真正有说服力的解释是，为了继承自然数运算中的分配律。^[8] 因为如果 $(-1)\times (-1)=-1$ ，那么运用分配律计算，就会出现 $0=(-1)\times (1-1)=-2$ 的悖论。

在满足了继承运算律的基础上，人们进一步寻求实际应用中对于“负负得正”的解释。^[9] 在行程问题中，最常见的量是速度和时间。如果一辆汽车以每小时 40 km 的速度，自西向东行驶（参见图 3），到达 O 地后继续行驶 2 小时，此时汽车位于 O 地东侧（ $40\text{ km}\times 2=$ ）80 km 处的 A 地。如果汽车行驶到 O 地后调转方向向西行驶，2 小时后汽车位于 O 点西侧 80 千米处的 B 地，可以表示为： $(-40\text{ km})\times 2=-80\text{ km}$ 。

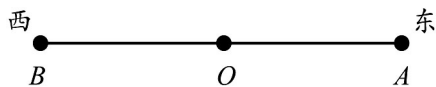


图 3 汽车行驶示意图

如果把汽车到达 O 地前 2 小时用“ -2 小时”表示，那么算式 $(-40\text{ km})\times (-2\text{ 小时})$ 就可以理解为汽车自东向西行驶 2 小时后到达 O 点，出发前汽车自然应当位于 O 点东侧 80 km 处的 A 地。也就是 $(-40\text{ km})\times (-2\text{ 小时})=80\text{ km}$ 。

因此，规定“负负得正”是与客观实际相符合的。有了坐标系和复数概念后， $(-1)\times (-1)$ 可以进一步理解为平面上点的运动。将 $(-1)\times (-1)$ 改写为 $(-1)\times (\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ)$ ，这就意味着是把实数轴的点 $(-1, 0)$ 沿逆时针方向旋转 180° ，其结果当然是 $(+1, 0)$ ，因此 $(-1)\times (-1)=+1$ 。这个过程实质上也可以成为著名的欧拉公式 $e^{i\pi}=-1$ 的直观解释。

综上，随着人的认识的拓展，对于许多人为规定的认识不断深入，解释的思路逐步多样，凡此体现多元化思想的内容应当适时、适量地融入数学学习活动中。

注重在数学课程与教学中渗透数学思想是我国数学教育的传统，《义务教育数学课程标准（2011 年版）》更是把“基本思想”列入了数学课程总目标。实现这样的目标并非易事，如果把数学思想理解为无数前人大师在数学研究实践中产生的无数想法的总和，那么数学思想就具有多样性、复杂性和隐蔽性，渗透在数学课程内容的方方面面，需要点点滴滴地挖掘、归纳和积累。

参考文献：

- [1] 郜舒竹.“探索规律”释义 [J]. 课程·教材·教法, 2015, 35 (1): 102-107.
- [2] 张景中. 感受小学数学思想的力量——写给小学数学教师们 [J]. 人民教育, 2007 (18): 32-35.
- [3] B Arnett. Rules and formulae in elementary mathematics [M]. Cambridge: Printed By W Metcalfe and Sons, Green Street, 1873: 2.
- [4] Ruhama Even, Dina Tirosh. Subject-matter knowledge and knowledge about students as sources of teacher-presentations of the subject-matter [J]. Educational Studies in Mathematics, 1995, 29 (1): 1-20.
- [5] Sudhir K Goel, Michael S Robillard. The equation [J]. Educational studies in mathematics, 1996, 33 (3): 319-320.
- [6] George Peacock. A treatise on algebra (Vol. I) [M]. London: Cambridge University Press, 1830.
- [7] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版)[S]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 17.
- [8] R 柯朗, H 罗宾. 数学是什么? [M]. 北京: 科学出版社, 1985: 80.

- [9] 德·克·法捷耶夫, 伊·斯·索明斯基. 代数学
(上册) 第二版 [M]. 高文, 译. 北京: 人民教育出版社, 1957: 75.

(责任编辑: 王维花)

The Thoughts Behind the Artificial Rules in Mathematics Curriculum

Gao Shuzhu

(Elementary Education College, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

Abstract: The thoughts behind the school mathematics curriculum come from numerous forerunner masters' teaching practice, which have the characteristics of diversity, complexity and imperceptibility. The content of artificial rules in math curriculum has strong subjective and abundant thoughts. The thoughts could be concluded as determinacy, coherence, permanence and diversity. It is beneficial to enrich the humanity of mathematics education and deepen the students' thinking level in math study by exploring the thought content and integrating them to students' mathematics learning.

Key words: artificial rule; thoughts in mathematics; determinacy; coherence; permanence; diversity

《中国教育科学》(双月刊) 投稿要求

《中国教育科学(中英文)》双月刊(刊号: CN10-1578/G4)已经国家新闻出版广电总局批准,即将正式创办,由中华人民共和国教育部主管、人民教育出版社主办。欢迎踊跃投稿。

一、办刊宗旨

专心教育学术,注重深入研究,促进理论创新,展现中国教育科学研究成果,向世界宣传中国教育科学重大成就,展示教育科学研究的中国特色和中国风格,促进中国教育科学发展,服务教育强国建设。

二、读者对象

教育科研人员、高校教育专业教师和研究生、热心教育研究的教育实践工作者。

三、主要栏目

大家论坛、回顾大家、教育原理、教育学科、学科教育、学术感悟、文献综述、学术争鸣、政策研究、教育书评。

四、稿件要求

1. 每篇文章 20 000 字左右,中文摘要 400 字左右,关键词 5 个以内。

2. 英文内容 800 字(词)左右(题目、作者、单位、摘要、关键词、作者简介等)。

3. 中英文作者简介:各 300 字左右,包括姓名、性别、民族、出生年月、籍贯、单位、职务、职称、学位、学历、主要研究领域或方向、学术兼职等。

4. 参考文献、注释采用脚注,每页单独排序。如:王道俊、郭文安主编:《教育学》,人民教育出版社 2016 年第 7 版,第 10 页;【英】约翰·洛克著,杨汉麟译:《教育漫话》,人民教育出版社 2000 年版;Z. Q. Wang. Chinese Students Head Overseas at Younger Ages, China Daily, 2013. 8. 2.

5. 请作者自留底稿,如果 1 个月未收到用稿通知,可自行处理。

五、投稿联系方式

电子信箱: zgjyxx@pep.com.cn

本刊联系人: 李冰(010-58758958)、石筠弢(010-58758980)

编辑部地址:北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼(100081)